**科学オリンピックへの道**

# 岡山物理コンテスト2016

# 問題Ｂ

2016 年 10 月 29 日（土）

11:25～12:35（70 分）

問題にチャレンジする前に次の**＜注意事項＞**と**＜指数を用いた数の表記＞**をよく読んでください。

問題は大問３題からなります。問題は一見難しく見えても，よく読むとわかるようになっています。

どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

**＜注意事項＞**

1．開始の合図があるまで，問題冊子（全 13 ページ）を開けてはいけません。
2．電卓を使用してもよろしい。
3．携帯電話やスマートフォンなどの電源は切り，カバンの中にしまっておきなさい。
4．解答はすべて解答用紙に記入しなさい。また，解答用紙 3 枚すべてに，必ずチャレンジ番号と氏名を記入しなさい。
5．気分が悪くなったりトイレに行きたくなったりしたとき，または質問があるときは手を挙げて監督者に知らせなさい。
6．終了の合図があったら，ただちに解答を止め，チャレンジ番号と氏名を確認の上，監督者の指示を待ちなさい。
7．問題冊子は持ち帰りなさい。

**＜指数を用いた数の表記＞**

大きい数や小さい数を扱うときには，指数表記を利用することが多い。

$$1.2\times10^{3}=1.2\times10\times10\times10=1200 \qquad 1.2\times10^{-3}=1.2\times\frac{1}{10^{3}}=\frac{1.2}{1000}=0.0012$$

指数表記では，一般に $a\times10^{n}$ （$1\leqq a<10$）の形で表す。
このように記述することで，大きな数や小さな数を簡潔に表現できる。

【例】　地球から太陽までの距離 ＝150000000 km ＝ $1.5\times10^{8}$ km
電子の質量 ＝0.00000000000000000000000000000091 kg ＝ $9.1\times10^{-31}$ kg

＜参考＞（物理のための数学基礎知識）

## 【三角比】

直角三角形の直角でない角度の１つが決まれば，３辺の比を決めることができる。これを三角比という。**図１**のように辺の長さ $a$，$b$，$c$ と角度 $\theta$ を決めると，正弦（sin：サイン），余弦（cos：コサイン），正接（tan：タンジェント）は以下のように定義される。

正弦　$\sin\theta = \dfrac{a}{c}$　　余弦　$\cos\theta = \dfrac{b}{c}$　　正接　$\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

これらにより，直角三角形の１つの辺の長さと１つの角度の大きさが決まれば，残りの辺の長さを三角比を用いて表すことができる。

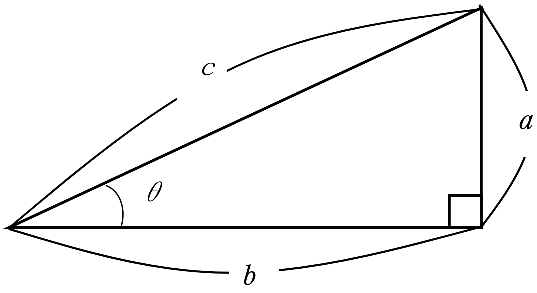


**図１**

## 【弧度法】

角度を表すのに，180°や 360°のように，〔°〕という単位を使って表す度数法は日常生活で広く使われている。一方数学や物理では，弧度法と呼ばれる表し方を用いる場合が多い。この表し方は次のように定義される。

半径 $r$ の円弧を考える。ある中心角に対する弧の長さは円の半径に比例するが，中心角にも比例する。つまり，この弧の長さは中心角を表していると考えることができる。そこで，**図２**ように，半径 $r$ の円弧の長さを $x$ とするとき，中心角 $\theta$ を，

$$\theta = \frac{x}{r}$$

と定義する。この表し方を弧度法といい，単位を rad（ラジアン）で表す。

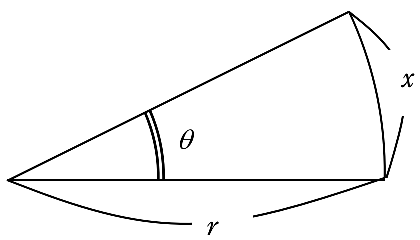


**図２**

したがって，半径 $r$ の円の円周の長さは $2\pi r$ であるから，360°を弧度法で表すと，その値 $\theta$〔rad〕は，

$$\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{〔rad〕}$$

となる。180°を弧度法で表すと，その値 $\theta'$〔rad〕は $\theta$ の半分であるから，

$$\theta' = \pi \text{〔rad〕}$$

となる。

# 第１問

日本では古来，建物を建てるため，木と木をつなぎ合わせるのに『木組み』や『釘』が使われてきた（**図１，２**）。江戸時代以前の釘は和釘と呼ばれる。これは，日本刀のように鍛造（熱した鉄をたたいて整形する手法）によって作られており，断面が四角形のものであった。

明治時代になり，西洋から輸入された釘は洋釘と呼ばれる。これは，鋼線（鋼を細く延ばしたもの）から量産できるため安価であり，断面が円形のものであった。明治 40 年頃には洋釘が国産化され，これが現在でも一般的に使われている。木組みや釘は，木材を押し広げながら打ち込み，生じた摩擦力によって木材を固定している（**図３**）。

**図４**のように，水平なあらい床の上で物体を水平方向に動かそうとする力を加える。物体が静止しているとき，動かそうとする力と同じ大きさの摩擦力（静止摩擦力）がはたらく。最大の静止摩擦力 $F$ は $F= \mu N$ で表され，$\mu$（静止摩擦係数）は物体の表面の材質や状態によって決まる。

釘よりもしっかりと固定できるものとして，ねじがある。1543 年，種子島に火縄銃とともに伝わったとされている。火薬が爆発する際の圧力に耐えるためには，しっかりと固定できるねじを使わなければならなかったからである。ねじは棒状の素材に，螺旋状に溝を掘ったもので，溝と山の形が三角形のものが一般的に使われている。この螺旋状の部分と，固定する部材との摩擦によって固定することができるしくみになっている（**図５，６**）。この問いでは，釘やねじに関することについて考える。

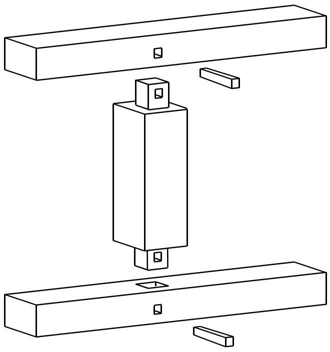

**図１　木組みの例**

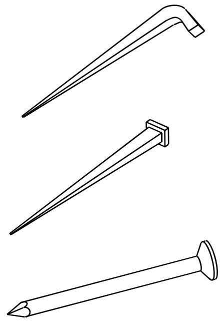

**図２　和釘（上２つ）と洋釘**

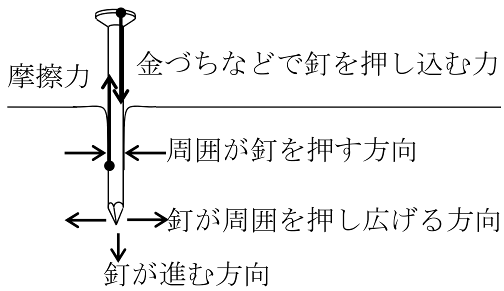


**図３　釘の仕組み**

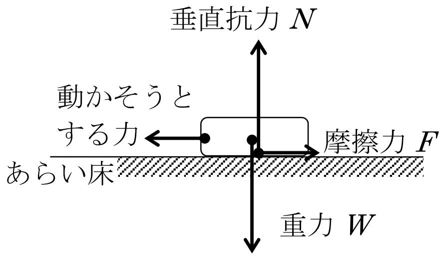


**図４　垂直抗力と摩擦力**

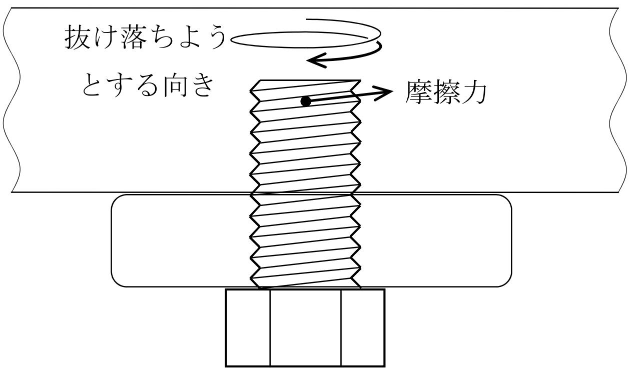


**図５　ねじの仕組み**

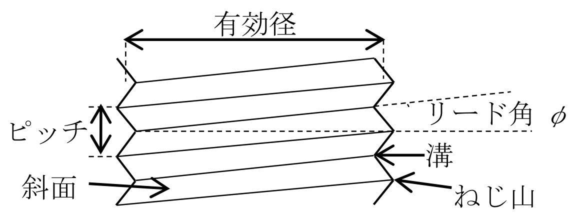


**図６　ねじの構造**

**問１**　釘を木材に打ち込む際には，ゆっくり押し込んでも釘は深く刺さらない。ここでは金づちを釘の頭にたたきつける場合に，釘にかかる力を求めてみよう。質量 0.40 kg の金づちを 5.0 m/s で釘にまっすぐ振り下ろし，釘は木材に 0.010 m だけ刺さった。このときの金づちから釘にはたらく平均の力の大きさは何〔N〕か。ただし，金づちの運動エネルギーはすべて，釘が木材に刺さるために使われたとする。

**問２**　釘を引き抜くために釘抜きという道具がある。先の二股（ふたまた）になっている部分にくぎの頭を引っかけ，てこの原理で引き抜くことができる。釘抜きを用いて点Ａに加える力を大きくしていくと，**図７**のように柄（え）に対して垂直な向きに加えた力が 100 N を超えたときに釘が抜け始めた。釘と木材との間の最大摩擦力の大きさは何〔N〕か。

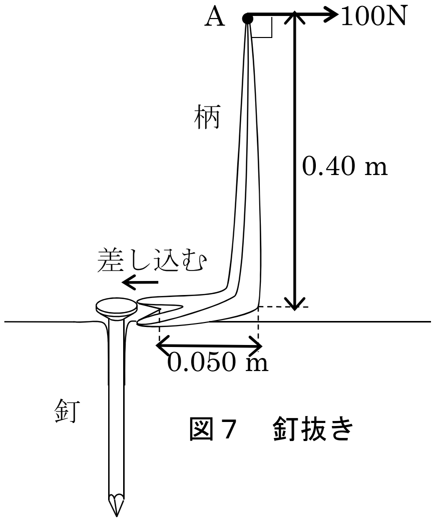

**図７　釘抜き**

**問３**　**図８**のように，ある物体があらい斜面の上で静止している。斜面の角度を大きくしていくと，角度 $\theta$ を超えた瞬間に物体は斜面を滑り始めた。この $\theta$ を摩擦角と呼ぶ。このときの静止摩擦係数 $\mu$ と $\theta$ との間に，$\mu = \tan\theta$ の関係が成立することを証明せよ。

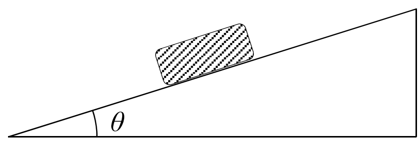

**図８　斜面上の物体**

**問４**　ねじは何かを固定する以外に，様々な目的で用いられる。たとえば古代ギリシャのアルキメデスは，円筒内のねじを回すことで水をくみ上げることを考案した。また，地中海の周辺では，オリーブの実を潰（つぶ）してオリーブオイルを搾（しぼ）ったり，ブドウを潰してワインを作ったりするために２千年以上前からねじが使われていた（**図９**）。ねじは１回転しても１ピッチの距離（ネジ山からネジ山までの距離）しか動かないため，仕事の原理から大きな力を加えることができる。

　ピッチが 0.0314 m のねじを用いてオリーブオイルを搾る機械を作り，ねじを回すハンドルをねじの軸から 0.40 m の長さになるように取り付けた。ハンドルの両端を持ち，ねじが回転するように力 $F$ をそれぞれ加えると，ねじがオリーブの実を押し潰す力は力 $F$ の何倍になるか。ただし，円周率を 3.14 とする。

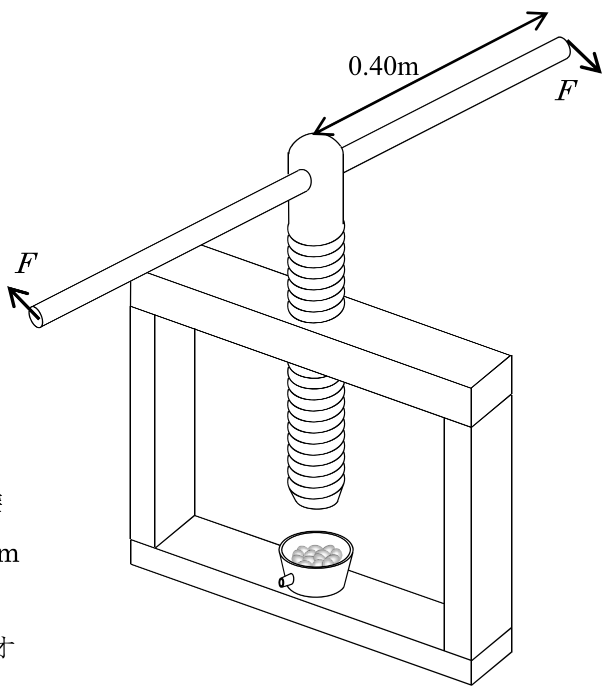

**図９　オリーブの実を搾る圧搾機（あっさくき）**

**問５**　**図１０**のように，ねじ山が四角状の角ねじと呼ばれるものについて考える。ねじ山によって図の水平に対して斜面が作られている。この斜面の水平に対する角度をリード角と呼び，$\phi$（ファイ）で表す。ねじを締める際，ねじの回転により斜面部分に生じる水平方向の締める力を $F_1$，周囲の材料から軸方向にかかってくる力を $W$ とする（**図１１**）。$F_1$ と $W$ の斜面に平行な成分の和を $F_1$，$W$，$\phi$ を用いて表せ。ただし，斜面上向きを正とする。

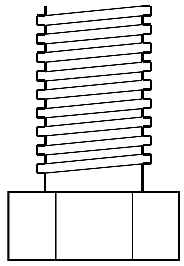

**図１０　角ねじ**

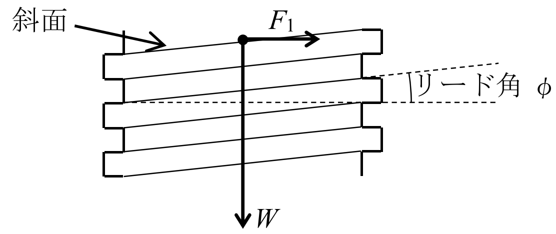


**図１１　角ねじにはたらく力**

**問６**　静止摩擦係数 $\mu$ を用いて，$F_1$，$W$ による最大摩擦力を表せ。

**問７**　**問５**と**問６**の力がつり合うとき，力 $F_1$ を $W$，$\phi$，摩擦角 $\theta$ を用いて表せ。

ただし，三角関数の公式　$\dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} = \tan(\alpha \pm \beta)$　を用いて式を整理すること。(複号同順)

**問８**　ねじをゆるめる場合，ゆるめる力 $F_2$ を，**問７**と同様に $W$，$\theta$，$\phi$ を用いて表せ。ただし，斜面下向きを正とする。

**問９**　リード角 $\phi$ と摩擦角 $\theta$ の大小と，ねじの締めやすさ，ゆるみにくさはどのような関係にあるか。次の（１），（２）の文章中の（　　　）に入る文を，下の①～④の中からそれぞれ１つずつ選べ。

（１）リード角 $\phi$ が小さいと，ねじは（　　　）。

（２）摩擦角 $\theta$ が大きいと，ねじは（　　　）。

①締めやすく，ゆるみにくい
②締めやすく，ゆるみやすい
③締めにくく，ゆるみにくい
④締めにくく，ゆるみやすい

**図５**のような三角ねじは角ねじよりも摩擦が大きく，ゆるみにくい。このため，ねじを締めて固定する場合，三角ねじが多く使われている。

# 第２問

空気抵抗が無い場合，ボールを斜め上方に投げ出すと，ボールは**図１**のように放物線を描いて運動する。この曲線を数式で表すと二次関数になる。二次関数のことを放物線と言うのはこのためである。

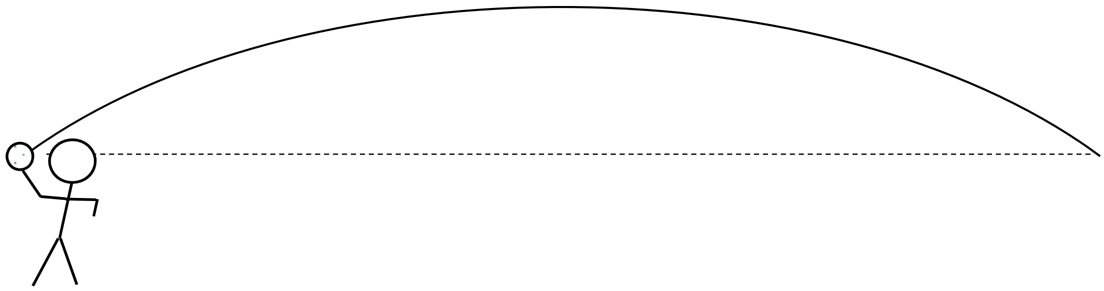

図１

同じ初速度でボールを一番遠くに達するようにするためには，仰角（投げ出すときの向き）を水平方向に対して 45° にすればよいことが知られている。これは，初速度の水平成分と鉛直成分の大きさが同じということである。この大きさを $v_0$ とする（**図２**）。

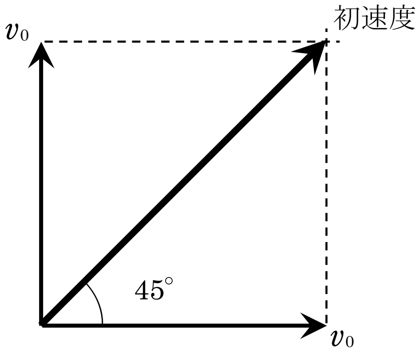


図２

**問１**　初速度の大きさを $v_0$ を用いて表せ。

投げ出した位置を原点として，水平右向きに $x$ 軸，鉛直上向きに $y$ 軸をとる（**図３**）。ボールの運動は水平方向と鉛直方向に分けて考えることができる。このとき，$x$ 軸方向は等速度運動，$y$ 軸方向は鉛直投げ上げ運動と同様の運動と考えられる。

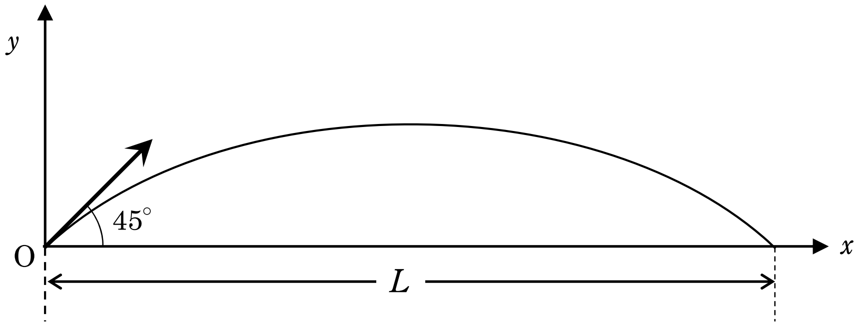


図３

投げ出した後の経過時間を$t$とすると，$x$，$y$は時間$t$の関数で表すことができる。ただし，重力加速度の大きさを$g$とする。

$$x = v_0 t$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

**問２**　この式から$t$を消去し，$x$と$y$の関係式を表せ。

**問３**　ボールが投げ出した高さ（ $y = 0$ ）に戻るまでの時間$T$と，水平到達距離$L$はそれぞれいくらか。

**問４**　初速度を２倍にすると，水平到達距離は何倍になるか。

次に，金づちを，仰角が 45° の向きになるように投げる場合を考える。金槌は鉄の塊に木の柄が取り付けられている（**図４**）。

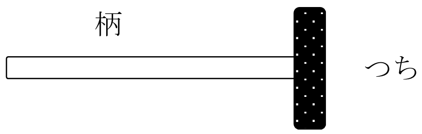


**図４**

柄の先を持って投げると，金づちは重心を中心に反時計回りに回転しながら放物運動をした。一定の時間間隔で光るストロボを用いて写真を撮影し，金づちの運動の様子を分析した。**図５**は，その写真を模式的に描いたものである。このとき，金づちは水平到達距離が 20 m で，元の高さに１回転して戻ってきた。この位置を点 P とする。

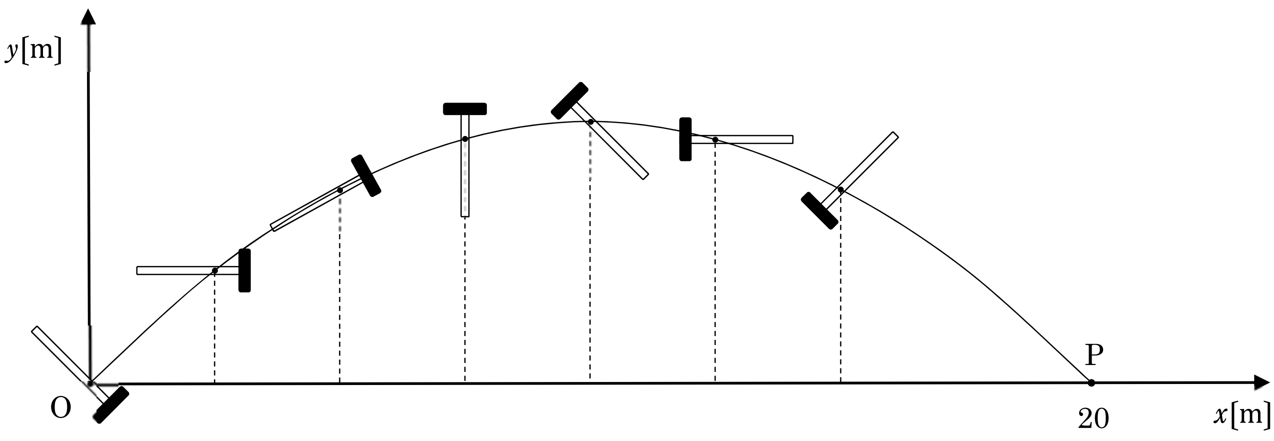


**図５**

**問５**　金づちが点 P に達するまでの時間は何秒か。ただし，重力加速度の大きさを$g = 10\mathrm{m/s^2}$とする。

**問６**　次に，**問５**と違う方法で金づちを投げた。その様子が，**図６**のように，写真が a，b の位置の２つだけ示されている。このとき，金づちは a - b 間で $\frac{1}{2}$ 回転したのか，$\frac{3}{2}$ 回転したのか，それ以上回転したのか区別がつかない。$\frac{3}{2}$ 回転のときだとすると，c の位置の写真はどうなるか。最も適当なものを，**図７**の①～⑧の中から１つ選べ。

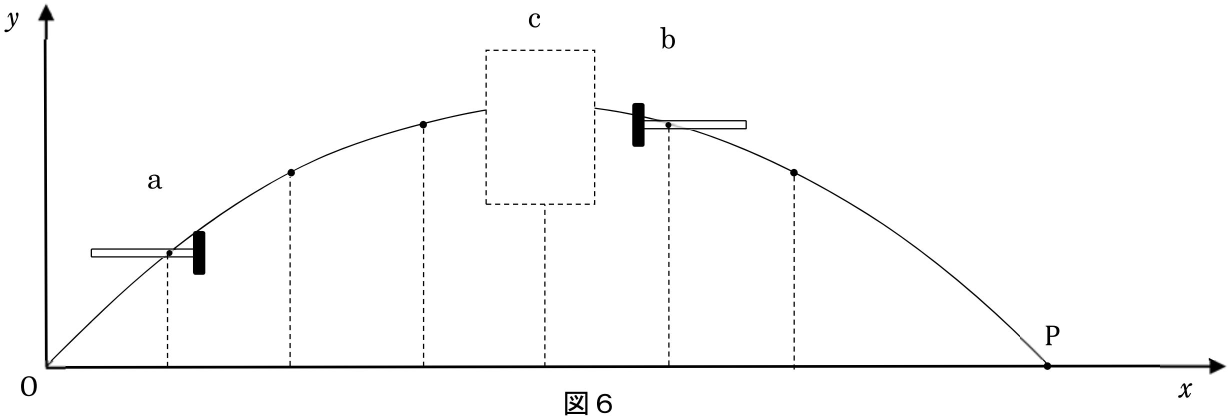


**図６**

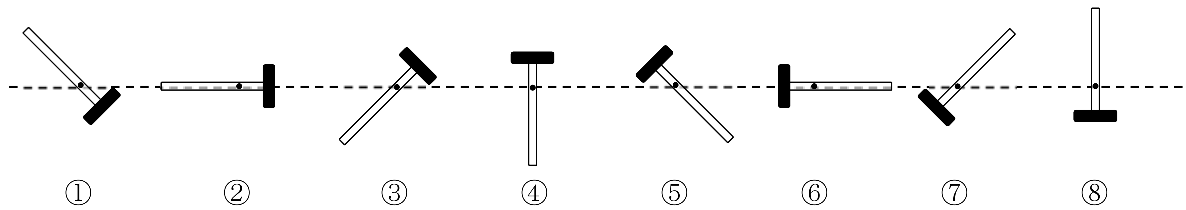


**図７**

金づちは重心を中心に回転しているので，重心の位置を知るために，台所にあるはかりで金づちの質量を測定した。**図８**のように，金づちの一方の端を台の上に置き，他方をはかりの上に置いて，柄を水平に保ちながら測定を行った。その結果，つちの側で 380 g，柄の側で 60 g，全体の長さは 33 cm であった。

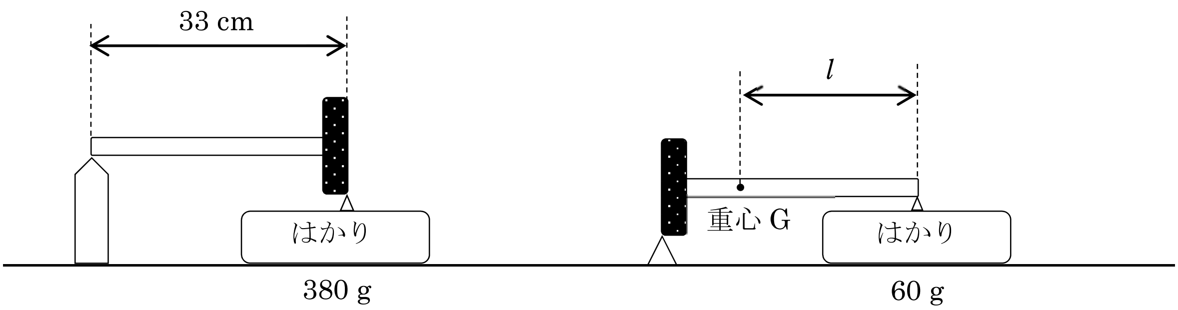


**図８**

**問７**　①金づちの質量と，②金づちの重心の位置（柄の端からの距離 $l$ ）はそれぞれいくらか。

# 第３問

近代科学の父と呼ばれているガリレオ・ガリレイは約 400 年前に望遠鏡を製作し，多くの天体を観測した。その観測により，月のクレーターや木星の周りをまわる衛星を発見した。当時の性能では土星を観測したときに土星の輪が土星の耳のように見えたらしく，そのようなガリレオのスケッチが今も残っている。その後，望遠鏡は改良が加えられ，様々な形状や仕組みのものが作られている。この問いでは，レンズと望遠鏡についての基本的な考え方をみていこう。

まず，凸レンズについて考える。レンズに光を入れると，像ができる。焦点の外側に物体を置いた場合は，像は物体とレンズを挟(はさ)んで反対側にできる。これを倒立実像という。また，レンズから焦点までの距離を焦点距離という。

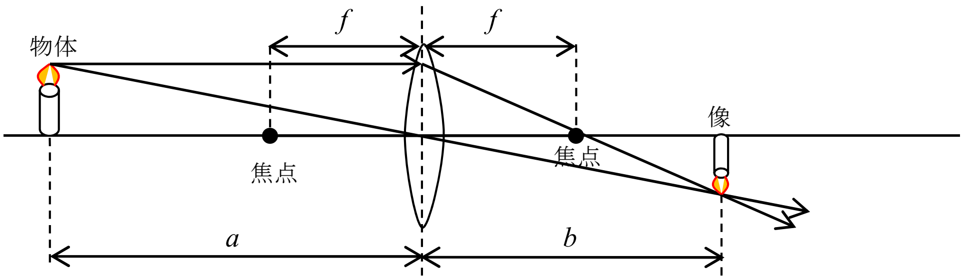


**図１**

物体とレンズとの距離を $a$，レンズと像との距離を $b$，焦点距離を $f$ とすると，次の関係が成立する。これをレンズの公式（写像公式）という。（これは，**図１**から相似の関係を用いると導くことができる。）

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

上の式で，天体のように物体が非常に遠いところにあるとき（$a$→無限大），$\frac{1}{a}\to 0$ となるので，$b=f$ となる。つまり，太陽や天体のように遠いところにある物体は，反対側の焦点に像を結ぶ。

**問１**　焦点距離が 20 cm の凸レンズから 60 cm 離れた位置に物体を置いた。像は，レンズから何 cm 離れた位置にできるか。

**問２**　物体と像の大きさの比を倍率という。倍率 $m$ は，距離 $a$，$b$ の比 $\frac{b}{a}$ になる。つまり，$m=\frac{b}{a}$ である。**問１**のときの倍率はいくらか。

物体が焦点の内側にあるとき，像は物体側にできる。これを正立虚像という。**図２**は，焦点距離 15 cm の凸レンズで，物体がレンズから 10 cm 離れた位置にあるときの様子を示している。レンズから 30cm 離れた位置に倍率 3 倍の像ができる。このように虫眼鏡は，レンズを通して正立虚像を観察することで物体を拡大して見ているのである。

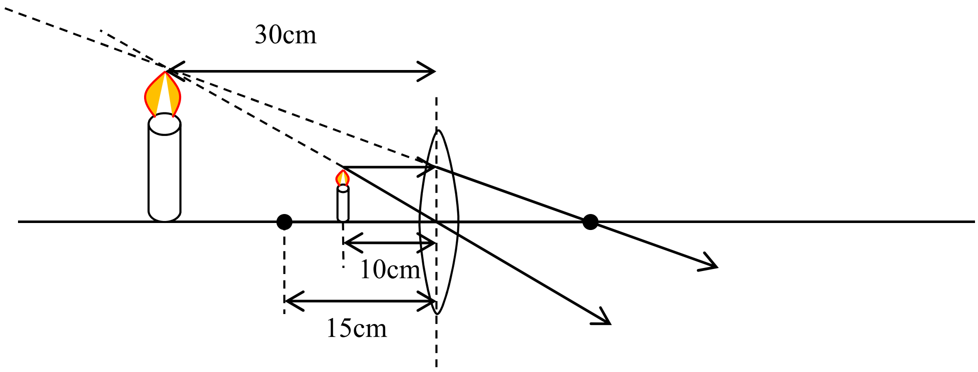


**図２**

ここで，レンズ２つを組み合わせる場合を考える。このとき，１つ目のレンズが作った像の位置に，２つ目のレンズの対象となる物体があるとして計算すればよい。

**問３**　**図３**のように，凸レンズ $L_1$ の焦点距離を 40 cm，凸レンズ $L_2$ の焦点距離を 10 cm，$L_1$ と $L_2$ との距離を 85 cm とし，物体は $L_1$ から左に 80 cm 離れた位置にあるものとする。このとき像は，$L_2$ から左右どちら向きに何 cm 離れた位置にできるか。また，倍率はいくらか。

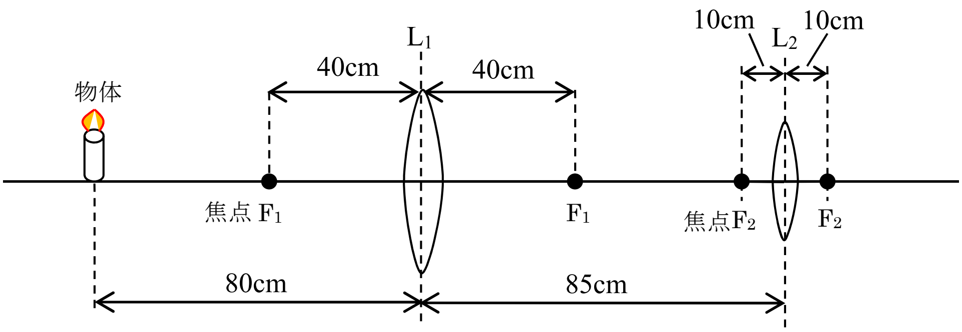


**図３**

望遠鏡は，凸レンズを２つ組み合わせて作られており，非常に遠い位置にある物体を見ることができる。望遠鏡の倍率を求めるために**図４**をもとにして考える。

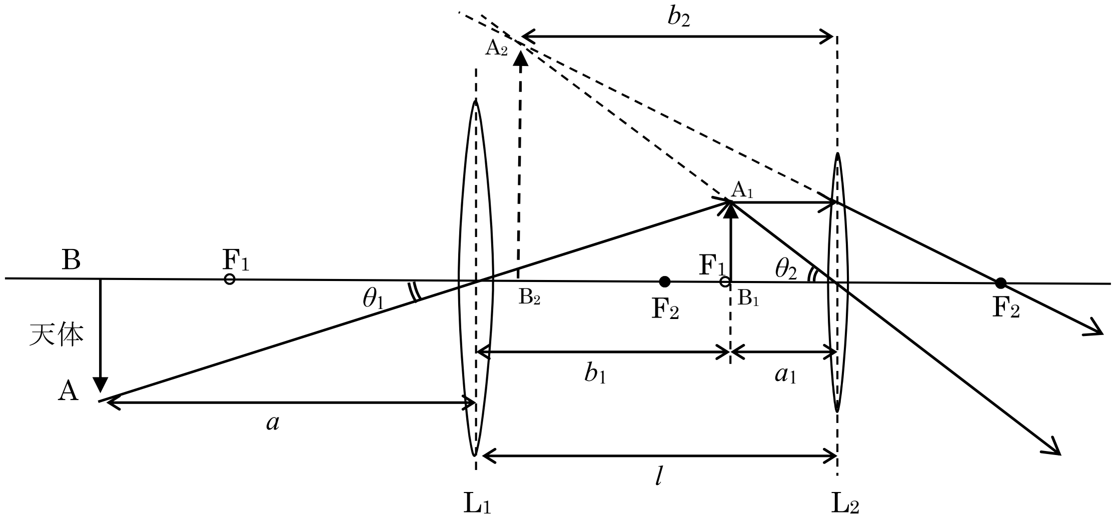


**図４**

$L_1$は焦点距離$f_1$の対物レンズ，$L_2$は焦点距離$f_2$の接眼レンズである。図において$F_1$，$F_2$はそれぞれ$L_1$，$L_2$の焦点であり，$L_1$と$L_2$との距離を$l$とする。天体は$L_1$から遠いところ（$a$→無限大）にある。AB の像$A_1B_1$は$f_1$の少しだけ外側にでき，この像の位置を$L_1$から距離$b_1$，$L_2$から距離$a_1$とする。$A_1B_1$は，$L_2$によって像$A_2B_2$となる。この位置を$L_2$から距離$b_2$とすると，無限遠（$b_2$→無限大）に像$A_2B_2$を見ることになる。そのため望遠鏡の場合，$A_1B_1$は$L_1$，$L_2$の焦点に極めて近くなるため，$a$→無限大，$b_2$→無限大よりレンズの公式から$a_1 \fallingdotseq f_2$，$b_1 \fallingdotseq f_1$と書ける。また，$L_1$と$L_2$との距離$l$は，$l = a_1 + b_1$と表せるため，$l \fallingdotseq f_1 + f_2$となる。

**問４**　望遠鏡の場合，倍率$m$は比$\dfrac{\theta_2}{\theta_1}$と考えられる。このことより，倍率$m$を，焦点距離$f_1$，$f_2$を用いて表せ。

**問５**　対物レンズの焦点距離 1200mm，接眼レンズの焦点距離 12.5mm のときの倍率はいくらか。

次に，天体望遠鏡の分解能について考える。これは対象物をどれだけ細かく見分けられることができるかを表した数値である。

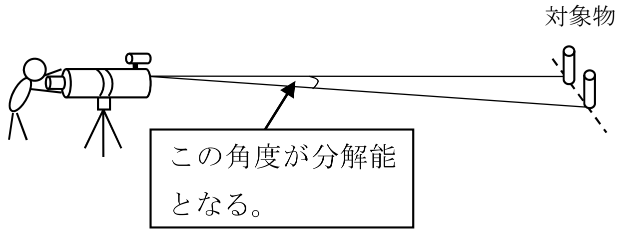


図５

あるメーカーの望遠鏡（対物レンズの口径・直径 10cm）の分解能は 1.2 秒であった。ここで角度の単位は，１度の $\frac{1}{60}$ が１分，１分の $\frac{1}{60}$ が１秒である。

問６　図６のように，１周 360°の一部分の角度 1.2 秒が 2cm であると考える。このとき，分解能 1.2 秒の望遠鏡では，2cm（1 円玉の直径）が見分けられる距離 $L$ はいくらか。

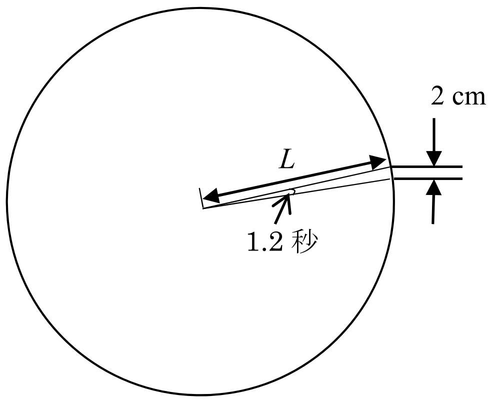


図６

このように，口径 10cm の望遠鏡で見ると，数 km 先にある距離 2cm だけ離れた２つの物体が見分けられる。

ここからは分解能について，光が波としての性質を示すことを用いて考える。単スリット（狭いすきま）を通った光は回折によって広がって進むが，スリットの端から出た光には距離の差ができてくる（**図７**）。そのため，**図７**のように中心部は明るいが，中心から離れると暗くなったり明るくなったりする。これをフラウンホーファー回折による像という。このとき，スリットの幅を $d$ とし，光の波長を $\lambda$ とすると，最初に暗くなる位置については $d\sin\theta = \lambda$ が成立することが知られている。$\theta$ は小さいので，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ とおくことができ，$d\theta = \lambda$，つまり，$\theta = \dfrac{\lambda}{d}$ となる。

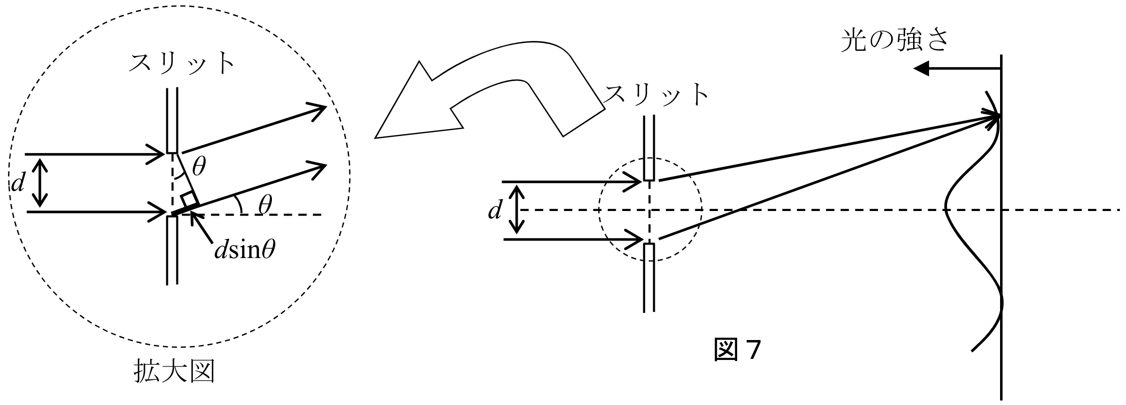

**図７**

これを望遠鏡に適用する場合は，レンズが円形なので上の計算は少し変更が必要である。**写真１**は，円形の穴に平行な光線を入射したときの像である。この像の明るさは一階のベッセル関数と呼ばれる関数で表され，暗くなっている部分は，ベッセル関数の値が 0 となる（ゼロ点と呼ばれる）角度である。その値は詳しく調べられており，ここではその結果だけを使うことにする。

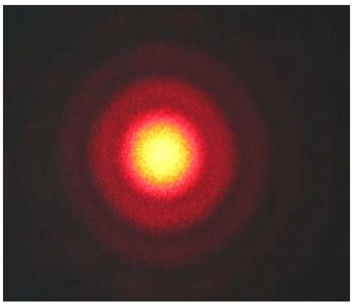
**写真１**

中央から一番目に暗くなる部分の角度は $\theta = 1.22\dfrac{\lambda}{d}$ が成立する。この角度 $\theta$ は弧度法で与えられており，単位は〔rad〕である。

実際の天体観測に適用する場合，分解能を表す単位は度数法で表されているので，〔rad〕を〔°〕に換算する必要がある。〔rad〕を〔°〕に換算するには$\dfrac{180}{\pi}$をかけなければならないことに注意すること。

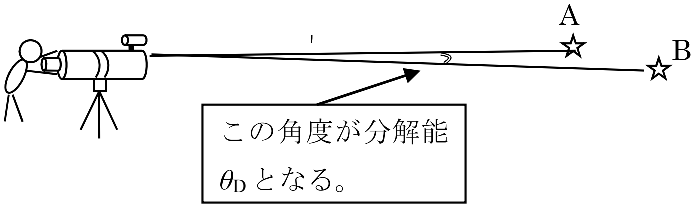


**図８**

天体を観測するときに，見かけ上近くに見える２つの星は，間隔が狭くなるにつれて，明るさの分布が**図９**の a～d のように変化する。

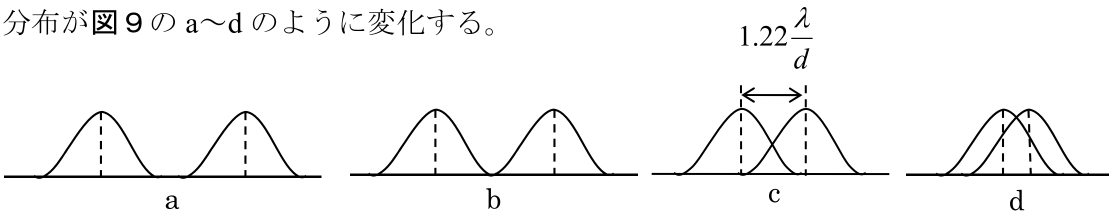


**図９**

２つの物体が分かれて見える限界は**図９－c** の場合である。つまり，２つの物体の角度が$\theta = 1.22\dfrac{\lambda}{d}$のときである。

**問７**　人の目は波長 0.55μm（$0.55\times10^{-6}$m）付近の光に対して一番感度がよいとされている。そこで，上の式$\theta = 1.22\dfrac{\lambda}{d}$に，$\lambda$＝0.55μm を代入し，口径 $D$〔cm〕の望遠鏡の分解能 $\theta_D$ を角度〔秒〕の単位で表す式を導け。

このように，望遠鏡の性能は口径によるところが大きい。凸レンズで大きな口径の望遠鏡を作るには技術的に限界がある。そこで，大きい望遠鏡では，凸レンズのかわりに凹面鏡を用いる。凹面鏡は大口径のものが作りやすい。これが反射望遠鏡である。

岡山県浅口市にある国立天文台岡山天体物理観測所では口径 188cm の望遠鏡（**写真２**）が備えられているが，現在，口径 3.8m の反射望遠鏡の建設が進められている。

**写真２**

**問８**　ガリレオが使った望遠鏡の口径は 4.2 cm と言われている。口径 3.8m の望遠鏡の分解能は，口径 4.2 cm の望遠鏡と比べて何倍になるか。

＜以下余白＞

岡山県マスコット　ももっち